부피를 미분한 결과가 겉넓이가 되는 입체도형의 조건

2학년 5반 14번 이름 : 정휘준

Ⅰ. 연구의 필요성 및 목적

어느 날 뉴스에서 정유 공장의 구형 탱크를 비춰줬는데, 번호들이 붙여진 하얀 바탕색이 눈에 띄었다. 그 구형 탱크에 하얀 페인트를 칠할 경우 페인트 소모량이 얼마나 될까 궁금해졌다. 면적당 페인트 소모량을 측정하고, 학교에서 배운대로 구(구형 탱크)의 부피를 식으로 표현한 다음 그 부피의 식을 미분하여 겉넓이를 계산해내면 알아낼 수 있을 것 같았다.

또 다른 입체도형 형태를 생각해보다가, 밑면의 거리만 해도 $230m$, 높이가 무려 $220m$나 되는 사각뿔 형태의 피라미드에 대해 구형 탱크의 경우처럼 사각뿔의 부피의 식을 구하고 그 부피의 식을 미분했더니 구(구형 탱크)와는 다르게 사각뿔의 겉넓이가 제대로 나오지 않았다.

학교에서 구의 부피를 미분하면 구의 겉넓이가 나온다고 배웠는데 피라미드와 같은 사각뿔의 경우에는 적용되지 않는다는 점이 부피를 미분한 결과가 겉넓이가 되는 입체도형의 조건을 알아보는 본 연구의 시작점이 되었다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 탱크

가스, 연료, 오일, 물 등을 넣어 저장하는 용기. 원통형, 구형 등의 형태가 존재한다.

[그림 1] 구형 저장 탱크

2. 수학적 개념의 정의

가. 미분

함수의 아주 작은 변화값을 나타내는 무한소를 말한다. $f(x)$를 미분한 것은 $f'(x)=y'=\dfrac{dy}{dx}$라고 한다. $f(x)=x^n$을 미분한 것은 $f'(x)=nx^{n+1}$이다.

나. 적분법

주어진 함수의 원시함수를 구하는 것으로서, 정적분을 구하는 것을 그 함수를 적분한다고 한다. 적분법은 그 계산법을 말한다. 크게 부정적분과 정적분으로 나뉜다. $f(x)$를 적분한 것은 $\int f(x)dx=F(x)+C$이며, $\int f'(x)dx=f(x)+C$이다.

다. 부정적분

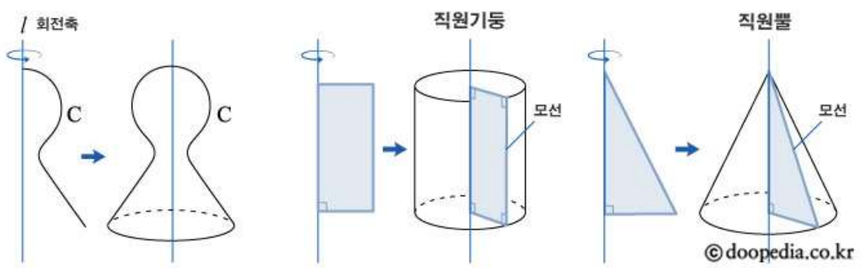
원시함수라고도 하며, x로 미분하여 $f(x)$가 되는 함수 y가 있을 때 이 함수 y. $f(x)$를 적분한 것은 $\int f(x)dx = F(x) + C$로 표시된다.

라. 정적분

주어진 함수 $f(x)$의 특정 구간 $[a, b]$에서의 적분 $\int_a^b f(x)dx$를 구하여 도형의 넓이나 부피를 계산하는 데 쓰이는 적분 방식.

마. 회전체

평면 도형이 동일 평면 안에 있는 직선을 축으로 하여 회전했을 때 생기는 입체. 아래의 그림의 직사각형을 예로 들면 이 직사각형이 y축을 중심으로(축으로) 회전했을 때 원기둥이 생성된다.



[그림 2] 회전체

회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자르면 그 단면은 원이 되며, 회전축을 포함하는 단면으로 자르면 그 단면은 합동이고 선대칭도형이다.

바. 부피

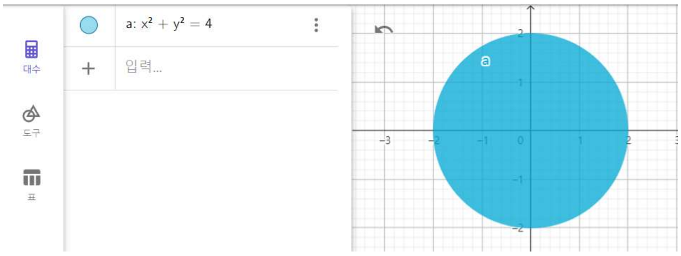
입체가 점유하는 공간 부분의 크기. 일반적으로 V로 표현한다. r을 반지름의 길이, h를 높이, S를 밑면의 넓이라고 할 때, 각기둥의 부피는 hS, 각뿔의 부피는 $\frac{1}{3}hS$, 원기둥의 부피는 $\pi r^2 h$, 원뿔의 부피는 $\frac{1}{3}\pi r^2 h$, 구의 부피는 $\frac{4}{3}\pi r^3$이다.

사. 겉넓이

입체도형의 표면 전체 넓이. r을 반지름의 길이, h를 높이, S를 밑면의 넓이라고 할 때, 정육면체의 겉넓이는 $6S$, 원기둥의 겉넓이는 $2\pi rh + 2\pi r^2$, 원뿔의 겉넓이는 $\pi r\sqrt{h^2 + r^2} + \pi r^2$, 구의 겉넓이는 $4\pi r^2$이다.

아. 원의 방정식

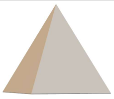
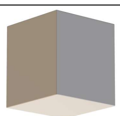
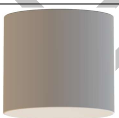
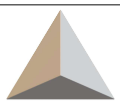
r이 반지름의 길이라고 할 때, $x^2 + y^2 = r^2$



[그림 3] r이 2인 원의 방정식

III. 연구 방법

1. 입체도형의 부피, 미분한 부피, 실제 겉넓이와의 관계

도형	부피(V)	미분한 부피	실제 겉넓이
 [그림 4] 반지름이 r인 구	$\frac{4}{3}\pi r^3$	$4\pi r^2\frac{dr}{dt}$	$4\pi r^2$
 [그림 5] 밑변의 길이가 r, 높이가 h인 정사각뿔	$\frac{1}{3}r^2h$	$\frac{2}{3}rh\frac{dr}{dt}+\frac{1}{3}r^2\frac{dh}{dt}$	$r^2+4\times\frac{1}{2}r\sqrt{h^2-\frac{r^4}{4}}$
 [그림 6] 변의 길이가 r인 정육면체	r^3	$3r^2\frac{dr}{dt}$	$6r^2$
 [그림 7] 반지름이 r, 높이가 h인 원기둥	πr^2h	$2\pi rh\frac{dr}{dt}+\pi r^2\frac{dh}{dt}$	$2\pi rh+2\pi r^2$
 [그림 8] 밑변의 길이가 r, 높이가 h인 삼각뿔	$\frac{\sqrt{3}}{12}r^2h$	$\frac{\sqrt{3}}{6}rh\frac{dr}{dt}+\frac{\sqrt{3}}{12}r^2\frac{dh}{dt}$	$\frac{3}{2}r\sqrt{h^2-\frac{r^2}{12}}+\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$

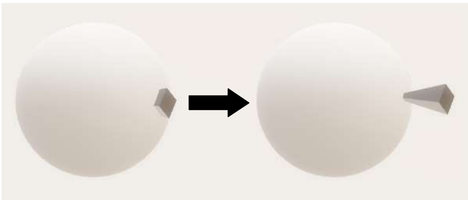
 [그림 9] 반지름이 r, 높이가 h인 원뿔	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$	$\frac{2}{3}\pi rh\frac{dr}{dt}+\frac{1}{3}\pi r^2\frac{dh}{dt}$	$\pi r\sqrt{h^2+r^2}+\pi r^2$

[표 1] 입체도형의 부피, 미분된 부피, 실제 겉넓이와의 관계

구의 부피의 식을 미분하면 구의 겉넓이가 나오지만 다른 입체도형의 부피의 식을 미분하면 그 입체도형의 겉넓이와 같게 나오지 않는다.

2. 구의 부피와 겉넓이의 관계

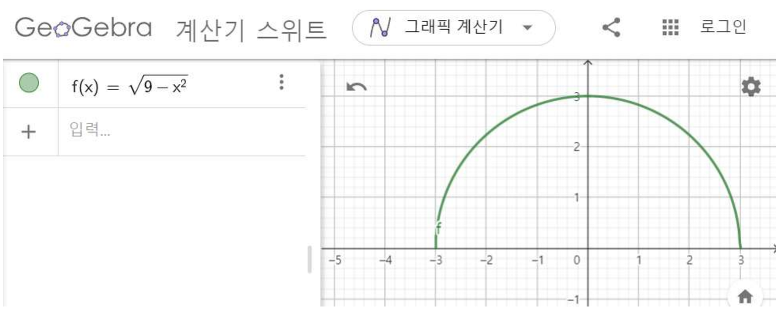
가. 구를 무수히 많은 사각뿔로 나눴을 때의 구의 부피와 구의 겉넓이



[그림 10] 구는 무수히 많은 사각뿔

원을 무수히 많은 삼각형의 합으로 보듯이 그림판 3D를 이용해 그린 [그림 10]처럼 구를 무수히 많은 사각뿔의 합으로 볼 수 있다. 반지름이 r인 구는 높이가 r, 밑변의 넓이가 s인 사각뿔의 합으로 볼 때 부피 $V=\frac{1}{3}r\sum s=\frac{4}{3}r^3$의 식에서 겉넓이 $S=\sum s=4\pi r^2$의 식을 얻을 수 있다.

나. 그래프를 이용한 구의 부피와 구의 겉넓이



[그림 11] 지오지브라로 그린 원의 방정식

[그림 12] 구는 원기둥의 합

위 그림은 $y=\sqrt{9-x^2}$그래프를 지오지브라를 이용해 그린 것이다. 이 그래프는 반지름이 3인 반원의 형태인데 x축을 중심으로 $360°$ 회전시키면 구의 형태가 나오게 된다. 구를 x축에 수직방향으로 잘게 자르면 원기둥의 모양이 나오는데 이것은 얇은 원기둥들의 합은 구의 부피라는 뜻이다.

이것을 적분으로 표현하면 부피 $V=\int_{-r}^{r}\pi R^2dx=\pi\int_{-r}^{r}y^2dx=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)dx=\frac{4}{3}\pi\times r^3$이다.

구의 부피를 구하기 위하여 구를 얇은 원기둥으로 잘랐다. 구의 겉넓이 역시 얇은 원기둥들의 옆면적들의 합으로 볼 수 있다.

즉, 겉넓이$S=\int_{-r}^{r} 2\pi ry\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=2\pi\int_{-r}^{r} y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=2\pi\int_{-r}^{r} y\sqrt{1+(y',)^2}\,dx$

$\therefore\ 2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\left(\sqrt{\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}}\right)^2}\,dx=4\pi r^2$

$\frac{dV}{dt}=4\pi r^2=S$

이를 통해 구의 부피를 미분한 결과가 구의 겉넓이와 일치한다는 것을 알 수 있다.

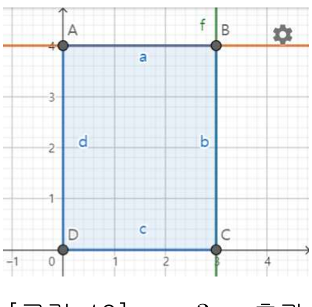
3. 정사각뿔의 부피와 겉넓이의 관계

밑변의 길이가 r, 높이가 h인 사각뿔의 부피 $V=\frac{1}{3}r^2h$, 겉넓이 $S=r^2+4\times\frac{1}{2}r\sqrt{h^2-\frac{r^4}{4}}$이다. 그렇지만 $\frac{dV}{dt}=\frac{2}{3}rh\frac{dr}{dt}+\frac{1}{3}r^2\frac{dh}{dt}$ 로 계산되며 실제 겉넓이 S와는 일치하지 않는다. 정사각뿔도 구의 경우처럼 높이 h인 밑면 면적이 작은 무수히 많은 사각뿔의 합으로 표현될 수 있다. 구는 정사각뿔 밑면의 합으로 겉넓이를 계산할 수 있음을 2에서 보였다. 정사각뿔의 밑면은 작은 사각뿔들의 밑면들의 합으로 계산할 수 있겠지만 작은 사각뿔들의 옆면들의 면적의 합은 정사각뿔의 옆면의 면적이 될 수 없음을 알 수 있다.

4. 정육면체의 부피와 겉넓이 관계

변의 길이가 r인 정육면체의 부피 $V=r^3$이며 $\frac{dV}{dr}=3r^2$이다. 이는 겉넓이 $6r^2$와 일치하지 않는다. 변의 길이가 $1cm$인 정육면체 a를 쌓아 만든 변의 길이가 $10cm$인 정육면체 A를 만들기 위해 a는 1000개가 필요하다. A의 부피는 a의 부피의 합으로 볼 수는 있지만 겉넓이는 그렇지 못하다. a의 겉넓이의 합은 $6000cm^2$이며 A의 겉넓이 $1000cm^2$보다 훨씬 큰 값을 가진다. 정육면체 역시 부피를 미분하면 겉넓이를 계산할 수 없으며 작은 정육면체의 겉넓이의 합은 큰 정육면체의 합과 일치하지 않는다.

5. 원기둥의 부피와 겉넓이의 관계



[그림 13] $x=3$, x축과
y축으로 둘러싸인 도형

[그림 13]의 도형을 y축을 중심으로 360° 회전시키면 반지름이 3, 높이가 4인 원기둥이 된다. 원기둥을 y축에 수직으로 잘게 자르면 높이가 아주 작은 원기둥으로 나눠지는데 이것을 적분으로 나타내면 부피 $V=\int_0^4(\text{반지름이 3인 원넓이})\times dy=\int_0^4\pi\times 3^2dy=36\pi$이며

$S=2\pi\int_0^4 x\sqrt{1+(x')^2}\,dy=\int_0^4(3\times\sqrt{1+(3')^2})dy=24\pi$가 나오는데, 기존에 계산했던 밑면 2개와 옆면의 합인 원기둥의 겉넓이와는 다른 밑면 2개가 빠진 옆면의 겉넓이로 계산된다.

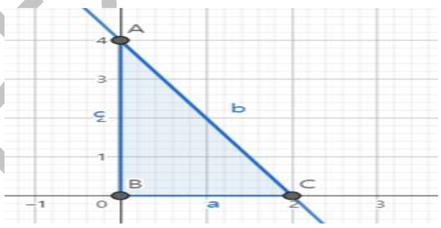
반지름 r, 높이 h인 원기둥으로 일반화시키면 부피 $V=\int_0^h \pi r^2 dy=\pi r^2 h$이며 겉넓이 $S=2\pi\int_0^h r\times\sqrt{1+(r')^2}\,dy=2\pi rh$이다.

$\frac{dV}{dr}=\frac{d(\pi r^2 h)}{dr}=2\pi rh=S$로 V를 r에 대해 미분할 경우 옆면의 겉넓이로 표현이 되지만 정사각뿔의 경우와 마찬가지로 V를 t에 대해 미분했을 때 $\frac{dV}{dt}=2\pi rh\frac{dr}{dt}+\pi r^2\frac{dh}{dt}$ 로 실제 겉넓이와는 차이가 있다. 또한 원기둥을 크기가 같은 작은 원기둥으로 나누고 밑넓이들의 총합과 옆넓이들의 총합은 작은 원기둥으로 나누기 전 본래의 원기둥의 겉넓이와 같아질 수 없다.

6. 정삼각뿔의 부피와 겉넓이의 관계

밑변의 길이가 r, 높이가 h인 정삼각뿔의 부피 $V=\frac{\sqrt{3}}{12}r^2h$이며 겉넓이 $\frac{3}{2}r\sqrt{h^2-\frac{r^2}{12}}+\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$이다. $\frac{dV}{dt}=\frac{\sqrt{3}}{6}rh\frac{dr}{dt}+\frac{\sqrt{3}}{12}r^2\frac{dh}{dt}$와 겉넓이는 일치하지 않는다. 그리고 정삼각뿔 역시 높이가 h이고 밑면의 면적이 작은 많은 정삼각뿔의 합으로 표현한다면 옆면의 면적은 작은 정삼각뿔들의 면적의 합으로 표현되지 않는다.

7. 원뿔의 부피와 겉넓이의 관계



[그림 14] $y=-2x+4$의 직선과
x축, y축으로 둘러싸인 도형

위 그림의 도형을 y축을 중심으로 360° 회전시키면 원뿔이 나오며 이 원뿔 역시 높이가 아주 작은 원기둥들의 합이 된다.

원뿔의 부피 $V=\int_0^4 \pi x^2 dy=\pi\int_0^4(\frac{1}{2}(4-y))^2 dy=\frac{16}{3}\pi$이며

겉넓이 $S=2\pi\int_0^4 x\sqrt{1+(x')^2}\,dy=2\pi\int_0^4\frac{1}{2}(4-y)\times\sqrt{1+((2-\frac{1}{2}y)')^2}\,dy=4\sqrt{5}\pi$이다.

원뿔의 겉넓이 적분 역시 밑면의 넓이를 제외한 옆면의 넓이로 계산된다.

반지름 r, 높이 h인 원뿔로 일반화하면

부피 $V=\int_0^h \pi x^2 dy=\pi\int_0^h\frac{r^2}{h^2}(h^2-2hy+y^2)dy=\frac{\pi}{3}r^2h$이며

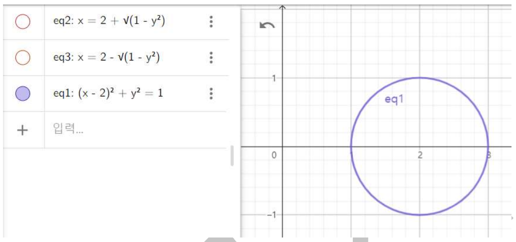
겉넓이 $S=2\pi\int_0^h x\times\sqrt{1+(x')^2}\,dy=2\pi\int_0^h \frac{r}{h}(h-y)\times\sqrt{\frac{h^2+r^2}{h^2}}\,dy=\pi r\sqrt{h^2+r^2}$이다.

원뿔의 부피를 미분한 $\frac{dV}{dt}=\frac{2}{3}\pi rh\frac{dr}{dt}+\frac{1}{3}\pi r^2\frac{dh}{dt}$ 식 역시 실제 겉넓이 $\pi r\sqrt{h^2+r^2}+\pi r^2$와 일치하지 않았다.

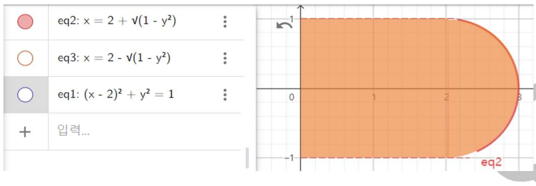
8. 도넛 형태의 입체도형의 부피와 겉넓이의 관계

한편 $(x-2)^2+y^2=1$의 그래프를 y축의 방향으로 360° 회전시키면 도넛의 형태가 된다.

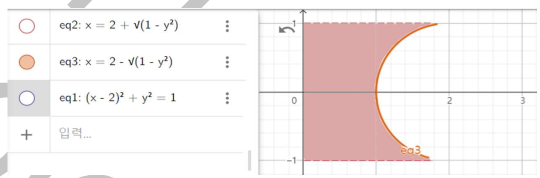
[그림 15] 도넛 형태의 입체도형



[그림 16] $(x-2)^2+y^2=1$의 그래프



[그림 17] $x=2+\sqrt{1-y^2}$의 그래프



[그림 18] $x=2-\sqrt{1-y^2}$의 그래프

위 그림의 도넛 모양은 반원 $x=R+\sqrt{r^2-y^2}$의 그래프를 y축 중심으로 회전시켜 얻은 입체도형의 부피에서 $x=R-\sqrt{r^2-y^2}$의 그래프를 y축 중심으로 회전시켜 얻은 입체도형의 부피를 뺀 결과이다.

$$V=\pi\int_{-r}^{r}((R+\sqrt{r^2-y^2})^2-(R-\sqrt{r^2-y^2})^2)dy=2\pi^2Rr^2$$

한편 겉넓이는 $x=2+\sqrt{1-y^2}$의 회전으로 얻은 입체도형의 겉넓이와 $x=2-\sqrt{1-y^2}$의 회전으로 얻은 입체도형의 겉넓이의 합이므로

$S=\int_{-r}^{r}2\pi(R+\sqrt{r^2-y^2})\times\frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}}dy+\int_{-r}^{r}2\pi(R-\sqrt{r^2-y^2})\times\frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}}dy=4\pi^2Rr$이다. V를 r에 대하여 미분하면 S가 계산된다.

IV. 연구 결과

1. 부피를 미분한 결과와 겉넓이의 동일 여부와 특징에 따른 입체도형의 분류

위의 연구에 따르면 부피를 미분한 결과가 겉넓이와 완벽하게 똑같은 입체도형은 구, 도넛 형태이고 밑면의 넓이가 제외된 결과를 가지는 입체도형은 원기둥, 원뿔이며 완전히 다른 결과를 가지는 입체도형은 정삼각뿔, 정사각뿔, 정육면체이다. 부피를 미분한 결과가 겉넓이와 같은 입체도형은 옆면, 밑면을 구분할 수 없고 자연스럽게 곡면으로 구성된 도형이라는 것, 부피를 미분한 결과가 밑면의 넓이가 제외된 겉넓이를 가지는 입체도형은 옆면과 밑면이 명확하게 구분되는 것, 부피를 미분한 결과가 겉넓이와 다른 입체도

형은 옆면, 밑면이 구분되고 회전체가 아니라는 것이 공통적인 특징이다. 이 특징들을 요약하여 표로 나타내면 아래와 같다.

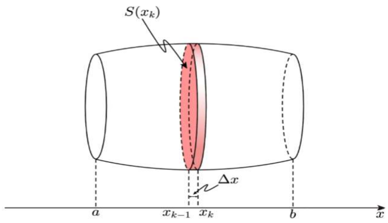
입체도형	특징	부피 미분한 결과와 겉넓이의 동일 여부
구, 도넛 형태	옆면, 밑면 구분 불가, 곡면으로 구성됨	동일
원기둥, 원뿔	옆면, 밑면 구분 가능	다름 적분으로 계산하면 밑면 넓이가 제외됨
삼각뿔, 사각뿔, 정육면체	옆면, 밑면 구분 가능, 회전체가 아님	다름 회전체가 아니어서 적분 계산 불가

[표 2] 부피를 미분한 결과와 겉넓이의 동일 여부와 특징에 따른 입체도형의 분류

2. 회전체를 적분하면 밑면은 포함되지 않음

위의 연구 중, 옆면과 밑면의 구분이 가능하고 회전축을 중심으로 그래프 상 도형을 회전시켜 얻어진 원기둥, 원뿔의 겉넓이는 그래프를 적분하는 방법으로 계산하였다.(III.연구방법 5.와 7. 참조)

이 방식에서는 회전체를 회전축에 평행하게 n등분 하였을 때, 각 기점을 기준으로 얇은 고무 밴드가 연결되어 있는 형태로 보고 각 밴드의 옆면적을 모두 합하면 겉넓이가 된다고 보고 있다. 즉, 각 밴드는 옆면적만 고려하고 있고 밑면은 고려하고 있지 않다.



[그림 19] 회전체의 단면

V. 결론 및 제언

1. 결론

이 연구에서는 여러 가지 입체도형의 부피, 부피를 미분한 결과와 겉넓이를 각각 비교하여 그 동일성 여부를 검증하고, 각 입체도형 별 특징을 이용해 부피와 겉넓이의 관계를 분석하여 부피를 미분했을 때 겉넓이가 나오는 입체도형의 조건을 정의했다.

또한, 수학적 계산을 통한 연구 결과 옆면과 밑면이 구분가능한 회전체를 적분했을 때 모든 면의 겉넓이가 포함되는 것이 아니라 밑면은 포함되지 않는다는 것을 알 수 있었다.

2. 제언

이 연구에서는 가능한 한 여러 가지 입체도형을 이용하여 실험을 진행하였다. 하지만, 지구상에 존재하는 모든 종류의 입체도형을 실험했다고 하기에는 한계가 있어, 부피를 미분한 결과와 겉넓이가 동일한 입체도형의 모든 경우를 포함하는 조건이라고 할 수 있을지 100% 장담할 수는 없다.

도넛 형태의 입체도형은 토러스라고 하는데, 연구자가 토러스를 적분해보니(III.연구방법 8. 참조) 상당히 특이하게 표현되었다. 본 연구에 포함하지는 않았지만, 구멍이 다수인 여러 형태의 토러스에 대해서 추가 실험을 진행하고 싶다는 생각이 들었다.

참 고 문 헌

탱크. (n.d.).Doopedia.검색일 : 2022.12.1. URL :
https://www.doopedia.co.kr/doopedia/master/master.do?_method=view&MAS_IDX=150806001509096

n.d.(2015년11월20일).[지식innovation] 왜 저장탱크마다 모양이 다를까요?. SKinnoNews.
검색일 : 2022.12.2. URL : https://skinnonews.com/archives/8355

"미분" (n.d.). Doopedia, 검색일 : 2022.12.5. URL :
https://www.doopedia.co.kr/doopedia/master/master.do?_method=view&MAS_IDX=101013000709737

"적분법" (n.d.). Doopedia, 검색일 : 2022.12.5. URL :
https://www.doopedia.co.kr/doopedia/master/master.do?_method=view&MAS_IDX=101013000895461

"부정적분" (n.d.). Doopedia. 검색일 : 2022.12.5. URL :
https://www.doopedia.co.kr/doopedia/master/master.do?_method=view&MAS_IDX=101013000844928

"정적분" (n.d.). Doopedia. 검색일 : 2022.12.5. URL :
https://www.doopedia.co.kr/doopedia/master/master.do?_method=view&MAS_IDX=101013000807259

"부피" (n.d.). Doopedia. 검색일 : 2022.12.5. URL :
https://www.doopedia.co.kr/doopedia/master/master.do?_method=view&MAS_IDX=101013000844974

"겉넓이" (n.d.). Doopedia. 검색일 : 2022.12.5. URL :
https://www.doopedia.co.kr/doopedia/master/master.do?_method=view&MAS_IDX=101013000736770

"회전체" (n.d.). Doopedia. 검색일 : 2022.12.5. URL :
https://www.doopedia.co.kr/doopedia/master/master.do?_method=view&MAS_IDX=101013000864879

"원" (n.d.). Doopedia. 검색일 : 2022.12.5. URL :
https://www.doopedia.co.kr/doopedia/master/master.do?_method=view&MAS_IDX=101013000895482